Естественные науки

УДК 514.76

ОСНАЩЕНИЕ СЕМЕЙСТВА ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: nv@pochta.ru

Статья посвящена инвариантному оснащению семейства S_q двумерных плоскостей в пятимерном эквиаффинном пространстве A_5 при всех допустимых значениях q: $2 \leqslant q \leqslant 8$. Это оснащение строится с помощью подвижного максимально канонизированного репера, которому дается полная аналитическая и геометрическая интерпретация. Основные обозначения и терминология соответствуют общепринятым, а все функции, встречающиеся в данной статье, предполагаются аналитическими.

1. Аналитический аппарат

Рассмотрим пятимерное эквиаффинное пространство A_5, отнесенное к эквиаффинному подвижному реперу $R = \{\bar{A}, \bar{e}_i\}$, $(i = \overline{1,5})$ с деривационными формулами:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \; d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \qquad (1.1)$$

где ω^i, ω_i^j – формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства

$$D\omega^i = \omega^i \wedge \omega_i^j, \; D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \; (i,j,k = \overline{1,5}), \qquad (1.2)$$

и соотношению $\omega_1^1 + \omega_2^2 + ... + \omega_5^5 = 0$ вытекающему из условия эквиаффинности $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ... , \bar{e}_5) = 1$.

В пространстве A_5 рассматривается q-мерное семейство $S_q (2 \leqslant q \leqslant 8)$ двумерных плоскостей l_2. Присоединим к S_q репер R так, что $l_2 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Здесь и в дальнейшем символом $l_s = (\bar{A}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, ... , \bar{x}_s)$ обозначается s-плоскость (s – мерная плоскость), проходящая через точку A, параллельно векторам $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_s$. Тогда дифференциальные уравнения многообразия S_q можно записать в следующем параметрическом виде:

$$\omega^{\hat{\alpha}} = A_a^{\hat{\alpha}} \theta^a, \; \omega_\alpha^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}} \theta^a, \; (\alpha,\beta = 1,2; \; \hat{\alpha},\hat{\beta} = \overline{3,5}, \qquad (1.3)$$

где параметрические формы θ^a удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\theta^a = \theta^b \wedge \theta_b^a;$$

$$D\theta_b^a = \theta_b^c \wedge \theta_c^a + \theta^c \wedge \theta_{ca}^b, \ldots (a,b,c = \overline{1,q}),$$

а величины $A_a^{\hat{\alpha}}$ и $A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_a^{\hat{\alpha}} - A_b^{\hat{\alpha}} \theta_a^b - A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}} \omega^\alpha + A_a^{\hat{\beta}} \omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}} = B_{ab}^{\hat{\alpha}} \theta^b,$$

$$dA_{\alpha a}^{\hat{\alpha}} - A_{\alpha b}^{\hat{\alpha}} \theta_a^b - A_{\beta a}^{\hat{\alpha}} \omega_\alpha^\beta + A_{\alpha a}^{\hat{\beta}} \omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}} = B_{\alpha ab}^{\hat{\alpha}} \theta^b,$$

$$(a,b = \overline{1,q}; \; \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{3,5}; \; \alpha, \beta = 1,2). \qquad (1.4)$$

Параметрические формы θ^a можно считать базовыми формами некоторого дифференцируемого многообразия M_q, каждой точке B которого отвечает вполне определённая 2-плоскость $l_2 \in S_q$. В дальнейшем будем рассматривать пространство L_q, изоморфное касательному пространству T_q к M_q в точке B. При этом в L_q с центром в точке B вводится центроаффинная структура, определяемая локальным центроаффинным репером $\tilde{R} = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\}$, где $\delta\bar{\varepsilon}_a = \tilde{\theta}_a^b \bar{\varepsilon}_b$, $\tilde{\theta}_a^b = \theta_a^b \Big|_{\theta^c = 0}$. Каждой плоскости l_2 из A_5 поставим в соответствие однозначным образом 3-плоскость l_3 так, чтобы выполнялись условия:

$$l_3 \cap l_2 = \bar{A}, \; l_3 \cup l_2 = A_5, \; l_3 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5) \qquad (1.5)$$

Тогда $\omega^\alpha = C_{\hat{\alpha}}^\alpha \omega^{\hat{\alpha}} + D_{\hat{\beta}}^{\alpha\beta} \omega_\beta^{\hat{\beta}}$, $\omega_{\hat{\alpha}}^\alpha = C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^\alpha \omega^{\hat{\beta}} + D_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\alpha\beta} \omega_\beta^{\hat{\beta}}$, где $A_a^\alpha = C_{\hat{\alpha}}^\alpha A_a^{\hat{\alpha}} + D_{\hat{\beta}}^{\alpha\beta} A_{\beta\alpha}^{\hat{\beta}}$, $A_{\hat{\alpha}a}^\alpha = C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^\alpha A_\alpha^{\hat{\beta}} + D_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\alpha\beta} A_{\beta a}^{\hat{\beta}}$, $(\alpha,\beta = \overline{1,2}; \; \hat{\alpha},\hat{\beta} = \overline{3,5}; \; a,b = \overline{1,q})$.

Эта 3-плоскость l_3 называется нормалью в смысле А.П. Нордена [3] или оснащающей плоскостью, или просто оснащением 2-плоскости l_2.

В данной статье решается задача об инвариантном определении оснащения q-семейства 2-плоскостей l_2 в A_5, т.е. выяснения случаев, когда величины A_a^α и $A_{\hat{\alpha}a}^\alpha$, являются вполне определенными функциями величин $A_a^{\hat{\alpha}}$, $A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}}$.

2. Основные направления и гиперплоскости при $2 < q \leqslant 8$

На многообразии M_q, ($2 < q \leqslant 8$), рассмотрим некоторую линию, проходящую через точку $B \in M_q$:

$$\theta^a = t^a \theta, \quad D\theta = \theta \wedge \theta_1,$$
$$dt^a - t^a \theta_1 + t^b \theta_b^a = t_1^a \theta,$$
$$(a,\ b = \overline{1,q}) . \qquad (2.1)$$

Касательную к этой линии в точке B будем обозначать

$$\overline{t} = t^a (\overline{B},\ \overline{\varepsilon}_a) \qquad (2.2)$$

и называть направлением. Пусть точка $\overline{X} = \overline{A} + x^1\overline{e}_1 + x^2\overline{e}_2$ является фокусом [2] плоскости $l_2 = (\overline{A}, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ вдоль (2.2). Тогда выполняется условие $(d\overline{X}, \overline{e}_1, \overline{e}_2) = = 0$, из которого с учетом (1.1) и (2.1) получаем:

$$(x^\alpha A^{\hat\alpha}_{\alpha a} + A^{\hat\alpha}_a)t^a = 0,\ (\alpha = 1,2;\ \hat\alpha = 3,4,5;\ a = \overline{1,q}). \quad (2.3)$$

Обозначим $x^0 = 1$, $A^{\hat\alpha}_a = A^{\hat\alpha}_{0a}$, тогда система (2.3) примет вид:

$$x^{\overline{\alpha}} A^{\hat\alpha}_{\overline{\alpha} a} t^a = 0,\ (\overline{\alpha} = 0, 1,2;\ \hat\alpha = 3,4,5;\ a = \overline{1,q}). \quad (2.3')$$

Система (2.3′) имеет нетривиальные решения относительно x^0, x^1, x^2 тогда и только тогда, когда $\det[A^{\hat\alpha}_{\overline{\alpha} a} t^a] = 0$, т.е., когда

$$B_{abc} t^a t^b t^c = 0,\ (a,\ b,\ c = \overline{1,\ q}), \qquad (2.4)$$

где величины B_{abc} определяются по формулам:

$$B_{abc} = \frac{1}{3} \left| \ A^3_{\overline{\alpha}(a},\ A^4_{|\overline{\alpha}|b},\ A^5_{|\overline{\alpha}|c)} \ \right| \qquad (2.5)$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dB_{abc} - B_{a_1 bc}\theta^{a_1}_a - B_{aa_1 c}\theta^{a_1}_b - B_{aba_1}\theta^{a_1}_c = B_{abca_1}\theta^{a_1}, \quad (2.6)$$

($a, b, c, a_1 = \overline{1,q}$; $\overline{\alpha} = 0, 1, 2$), ($\overline{\alpha}$ – номера строк).

Таким образом, множество всех фокальных направлений в L_q образует алгебраический конус ψ_3^{q-1} третьего порядка и размерности $q-1$ с вершиной в точке B. Уравнение конуса ψ_3^{q-1} имеет вид (2.4). Рассмотрим в L_q направление $\overline{v} = (\overline{B},\ \overline{\varepsilon}_a)v^a$ проходящее через точку B. Этому направлению в L_q отвечает гиперплоскость V_{q-1}: $B_{abc}v^a v^b t^c = 0$ которая является линейной полярой или полярой порядка 2 направления $\overline{v}$ относительно гиперконуса (2.4) в смысле [4, С. 1316]. Каждой точке $B \in M_q$ в L_q поставим в соответствие q направлений

$$v_b = v_b^a (\overline{B},\ \overline{\varepsilon}_a),\ (a,b = \overline{1,\ q}) \qquad (2.7)$$

и соответствующих им q гиперплоскостей

$$w^b = (v_1,\ v_2, \ldots, v_{b-1}, v_{b+1}, \ldots, v_q), \qquad (2.8)$$

проходящих через q–1 направлений v_a, кроме $v_b (a \neq b)$.

Определение 1: Направление $v_b \in L_q$ и соответствующие им гиперплоскости w^b называются *основными относительно гиперконуса* ψ_3^{q-1} (*в смысле* [4] *или* [5]), если они не принадлежат этому гиперконусу и каждая гиперплоскость w^b является линейной полярой соответствующего ему направления $v_b \notin w^b$ относительно этого гиперконуса.

Теорема 2.1. Каждой точке $B \in M_q$ в L_q в общем случае отвечает конечное число основных направлений v_b и соответствующих им гиперплоскостей w^b относительно ψ_3^{q-1} ($q > 2$).

Доказательство. Пусть точке $B \in M_q$ в L_q соответствуют направления $v_b = v_b^a(\overline{B}, \overline{\varepsilon}_a)$, ($a,b = \overline{1,q}$). Для этих направлений линейными полярами относительно ψ_3^{q-1} будут гиперплоскости вида:

$$\forall v_b \mapsto w^b = (v_1,\ v_2, \ldots, v_{b-1}, v_{b+1}, \ldots, v_q\ ) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \varphi_{ab} := B_{a_1 a_2 a_3} v_a^{a_1} v_a^{a_2} v_b^{a_3} = 0,\ (a \neq b). \qquad (2.9)$$

Таким образом, для определения v_a^b получаем систему $q(q-1)$ алгебраических уравнений 3-го порядка с q^2 неизвестными. Кроме того, выполняются следующие соотношения

$$B_{a_1 a_2 a_3} v_a^{a_1} v_a^{a_2} v_a^{a_3} \neq 0. \qquad (2.10)$$

Рассмотрим матрицу Якоби системы (2.9):

$$I = \left[\frac{\partial \varphi_{ab}}{\partial v_c^d} \right],\ (a,\ b,\ c,\ d = \overline{1,\ q}), \qquad (2.11)$$

где частные производные вычисляются по формулам $\dfrac{\partial \varphi_{ab}}{\partial v_a^c} = 2B_{a_1 a_2 a_3} v_a^{a_1} v_b^{a_3}$, $(a \neq b)$, $\dfrac{\partial \varphi_{ab}}{\partial v_b^c} = B_{a_1 a_2 a_3} v_a^{a_1} v_a^{a_3}$, $(a \neq b)$. Дальнейшие рассуждения с учётом (2.9) – (2.11) аналогичны приведённым в статьях [4] и [5] в соответствии с [6, С. 146–147, теорема III, С. 183–184, теорема I]. В общем случае ранг матрицы (2.11) равен Q. Это означает, что система (2.9) состоит из Q алгебраических независимых уравнений с $Q^* = q^2$ неизвестными. Следовательно, она определяет конечное число основных направлений v_b и гиперплоскостей w^b. Если Rang $I < Q$, то в этом случае система (2.9) состоит из алгебраически зависимых уравнений и определяет бесчисленное множество основных направлений и гиперплоскостей в L_q. Заметим, что теорема имеет место в предположении, что $2 < q \leqslant 8$. Кроме того, величины $B_{a_1 a_2 a_3}$ зависят от $\tilde{Q} = 9q$ величин $A^{\hat\alpha}_a$ и $A^{\hat\alpha}_{\alpha a}$, на которые накладывается q^2 соотношений. Поэтому должно быть $q^2 < 9q \Rightarrow q < 9$. Проведем в q – плоскости L_q точки $B \in M_q$ ($2 < q \leqslant 8$) такую канонизацию центроаффинного репера $\tilde{R}$, при которой:

$$B_{aab} = 0,\ B_{aaa} \neq 0,\ B \neq 0,\ (a \neq b), \qquad (2.12)$$

Из дифференциальных уравнений (2.6) получаем, что формы θ_a^b, ($a \neq b$), являются главными, т.е. $\theta_a^b = \tilde{B}^b_{ac}\theta^c$, ($a \neq b$). Геометрически это означает, что направления $v_1^a = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}_a) \in L_q$ и гиперплоскости $w_{q\text{-}1a} = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}_1, \overline{\varepsilon}_2, \ldots, \overline{\varepsilon}_{a-1}, \overline{\varepsilon}_{a+1}, \overline{\varepsilon}_q)$ являются основными относительно гиперконуса ψ_3^{q-1}. При этом из рассмотрения исключается случай $B_{aaa} = 0$, когда $v_1^a \in \psi_3^{q-1}$, и $B = 0$, когда основные v_1^q и $w_{q\text{-}1a}$ определя-

ются бесчисленным числом способов. Заметим, что канонизация центроаффинного репера $\widetilde{R}$ в L_q типа (2.12) существует в соответствии с [7].

3. Случай *q* = 2

В этом параграфе будет дано построение оснащения 2-семейства S_2 плоскостей l_2 в A_5. Как отмечено в предыдущем параграфе, гиперконус ψ_3^1 представляет собой совокупность трех основных направлений, проходящих через точку $B \in M_2$, которые в силу (2.4) и (2.5) определяются из алгебраического уравнения третьего порядка:

$$B_{111} + 3B_{112}\lambda + 3B_{221}\lambda^2 + B_{222}\lambda^3 = 0,\ t^2 = \lambda t^1,$$

$$B_{111} = \begin{vmatrix} A_1^3 & A_1^4 & A_1^5 \\ A_{11}^3 & A_{11}^4 & A_{11}^5 \\ A_{21}^3 & A_{21}^4 & A_{21}^5 \end{vmatrix},\ B_{222} = \begin{vmatrix} A_2^3 & A_2^4 & A_2^5 \\ A_{12}^3 & A_{12}^4 & A_{12}^5 \\ A_{22}^3 & A_{22}^4 & A_{22}^5 \end{vmatrix},$$

$$B_{112} = \frac{1}{3}\left\{ \begin{vmatrix} A_1^3 & A_1^4 & A_2^5 \\ A_{11}^3 & A_{11}^4 & A_{12}^5 \\ A_{21}^3 & A_{21}^4 & A_{22}^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1^3 & A_2^4 & A_1^5 \\ A_{11}^3 & A_{12}^4 & A_{11}^5 \\ A_{21}^3 & A_{22}^4 & A_{21}^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_2^3 & A_1^4 & A_1^5 \\ A_{12}^3 & A_{11}^4 & A_{11}^5 \\ A_{22}^3 & A_{21}^4 & A_{21}^5 \end{vmatrix} \right\},$$

$$B_{221} = \frac{1}{3}\left\{ \begin{vmatrix} A_1^3 & A_2^4 & A_2^5 \\ A_{11}^3 & A_{12}^4 & A_{12}^5 \\ A_{21}^3 & A_{22}^4 & A_{22}^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_2^3 & A_1^4 & A_2^5 \\ A_{12}^3 & A_{11}^4 & A_{12}^5 \\ A_{22}^3 & A_{21}^4 & A_{22}^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_2^3 & A_2^4 & A_1^5 \\ A_{12}^3 & A_{12}^4 & A_{11}^5 \\ A_{22}^3 & A_{22}^4 & A_{21}^5 \end{vmatrix} \right\}. \qquad (3.1)$$

Проведем в L_2 канонизацию центроаффинного репера $\widetilde{R}$ типа (2.12):

$$B_{112} = 0,\ B_{221} = 0,\ B_{111} \neq 0,$$
$$B_{222} \neq 0 \Rightarrow B = -B_{111}B_{222} \neq 0. \qquad (3.2)$$

Из (3.1) следует, что в L_2 каждой точки $B \in M_2$ основными направлениями будут

$$\overline{v}_1 = (\overline{B},\ \overline{\varepsilon}_1),\ \overline{v}_2 = (\overline{B},\ \overline{\varepsilon}_2),$$
$$\overline{v}_3 = (\overline{B},\ \overline{\varepsilon}_1 + \varepsilon\,\overline{\varepsilon}_2),\ (\varepsilon \neq 0), \qquad (3.3)$$

где величина ε определяется из уравнения

$$B_{222}\varepsilon^3 + B_{111} = 0,\ (\varepsilon \neq 0,\ \varepsilon \neq \infty). \qquad (3.4)$$

Рассмотрим в пространстве A_5 гиперплоскость Γ_4, отвечающую точке $B \in M_2$ и проходящую через плоскость $l_2 = (\overline{A}, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$:

$$\Gamma_4(x):\ x_3x^3 + x_4x^4 + x_5x^5 = 0. \qquad (3.5)$$

Найдем $d[\overline{e}_1, \overline{e}_2] = (\omega_1^1 + \omega_2^2)[\overline{e}_1, \overline{e}_2] + \omega_1^{\hat{\alpha}}[\overline{e}_{\hat{\alpha}}, \overline{e}_2] + \omega_2^{\hat{\alpha}}[\overline{e}_1, \overline{e}_{\hat{\alpha}}]$. Здесь символом $[\overline{e}_1, \overline{e}_2]$ обозначается бивектор векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$. Следовательно, $\Gamma_4(x)$ содержит l_2 и параллельна $(l_2)'$, смежной l_2 вдоль некоторого направления

$$\theta^1 : \theta^2 = t^1 : t^2 \qquad (3.6)$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_3A_{1a}^3t^a + x_4A_{1a}^4t^a + x_5A_{1a}^5t^a = 0, \\ x_3A_{2a}^3t^a + x_4A_{2a}^4t^a + x_5A_{2a}^5t^a = 0, \end{cases} \qquad (3.7)$$

т.е., когда выполняется условие:

$$\mathrm{Rang}\begin{bmatrix} A_{1a}^3t^a & A_{1a}^4t^a & A_{1a}^5t^a \\ A_{2a}^3t^a & A_{2a}^4t^a & A_{2a}^5t^a \end{bmatrix} = 2.$$

Каждому направлению (3.6) в A_5 отвечает одна гиперплоскость $\Gamma_4(t^1{:}t^2)$ типа (3.5), которая вдоль этого направления параллельна $(l_2)'$. Тангенциальные координаты x_3, x_4, x_5 такой гиперплоскости при заданных t^1, t^2 определяются из системы (3.7). Рассмотрим гиперплоскости, отвечающие направлениям (3.3) и определяемые соответствующими системами (3.7):

$$l_4^{45} = \Gamma_4(\overline{v}_1) = \Gamma_4(1,\ 0):\begin{cases} x_3A_{11}^3 + x_4A_{11}^4 + x_5A_{11}^5 = 0, \\ x_3A_{21}^3 + x_4A_{21}^4 + x_5A_{21}^5 = 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Rang}\begin{bmatrix} A_{11}^3 & A_{11}^4 & A_{11}^5 \\ A_{21}^3 & A_{21}^4 & A_{21}^5 \end{bmatrix} = 2. \qquad (3.8)$$

$$l_4^{35} = \Gamma_4(\overline{v}_2) = \Gamma_4(0,\ 1):\begin{cases} x_3A_{12}^3 + x_4A_{12}^4 + x_5A_{12}^5 = 0, \\ x_3A_{22}^3 + x_4A_{22}^4 + x_5A_{22}^5 = 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Rang}\begin{bmatrix} A_{12}^3 & A_{12}^4 & A_{12}^5 \\ A_{22}^3 & A_{22}^4 & A_{22}^5 \end{bmatrix} = 2. \qquad (3.9)$$

$$l_4^{34} = \Gamma_4(\overline{v}_3) =$$
$$= \Gamma_4(0,1):\begin{cases} x_3(A_{11}^3 + \varepsilon A_{12}^3) + x_4(A_{11}^4 + \varepsilon A_{12}^4) + \\ +x_5(A_{11}^5 + \varepsilon A_{12}^5) = 0, \\ x_3(A_{21}^3 + \varepsilon A_{22}^3) + x_4(A_{21}^4 + \varepsilon A_{22}^4) + \\ +x_5(A_{21}^5 + \varepsilon A_{22}^5) = 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Rang}\begin{bmatrix} A_{11}^3 + \varepsilon A_{12}^3 & A_{11}^4 + \varepsilon A_{12}^4 & A_{11}^5 + \varepsilon A_{12}^5 \\ A_{21}^3 + \varepsilon A_{22}^3 & A_{21}^4 + \varepsilon A_{22}^4 & A_{21}^5 + \varepsilon A_{22}^5 \end{bmatrix} = 2. \qquad (3.10)$$

Проведем следующую канонизацию аффинного репера R в A_5 в соответствии с [7]:

$$A_{11}^3 = 0,\ A_{21}^3 = 0,\ A_{12}^4 = 0,\ A_{22}^4 = 0,$$
$$A_{11}^5 + \varepsilon A_{12}^5 = 0,\ A_{21}^5 + \varepsilon A_{22}^5 = 0,$$
$$\overset{(1)}{A} = \begin{vmatrix} A_{11}^4 & A_{11}^5 \\ A_{21}^4 & A_{21}^5 \end{vmatrix} \neq 0;\ \overset{(2)}{A} = \begin{vmatrix} A_{12}^3 & A_{12}^5 \\ A_{22}^3 & A_{22}^5 \end{vmatrix} \neq 0;$$
$$\overset{(3)}{A} = \begin{vmatrix} A_{12}^3 & A_{11}^4 \\ A_{22}^3 & A_{21}^4 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3.11)$$

Тогда следующие формы становятся главными: $\omega_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = A_{\hat\alpha a}^{\hat\beta}\theta^a$, $(\hat\alpha \neq \hat\beta)$, величины $A_{\hat\alpha a}^{\hat\beta}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям: $dA_{\hat\alpha a}^{\hat\beta} - A_{\hat\alpha b}^{\hat\beta}\theta_a^b - A_{\alpha a}^{\hat\beta}\omega_{\hat\alpha}^{\alpha} = A_{\hat\alpha ab}^{\hat\beta}\theta^b$, $(\hat\alpha, \hat\beta = 3,4,5;\ a,b = 1,2)$. Фиксация (3.11) геометрически означает, что гиперплоскости (3.8–3.10) имеют вид: $l_4^{45} = (\bar A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_4, \bar e_5)$, $l_4^{35} = (\bar A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_3, \bar e_5)$, $l_4^{34} = (\bar A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_3, \bar e_4)$. Отсюда вытекает геометрическая характеристика 3-плоскостей, проходящих через l_2: $l_3^3 = (\bar A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_3) = l_4^{34} \cap l_4^{35}$, $l_3^4 = (\bar A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_4) = l_4^{34} \cap l_4^{45}$, $l_3^5 = (\bar A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_5) = l_4^{45} \cap l_4^{35}$. Заметим, что из (3.11) вытекают следующие соотношения:

$$\omega_1^3 = \lambda_1\omega_2^3,\ \omega_1^4 = \lambda_2\omega_2^4,$$
$$\omega_1^5 = \lambda_3\omega_2^5,\ \omega_2^5 = A_{22}^5(-\varepsilon\theta^1 + \theta^2),$$
$$A_{12}^3 = \lambda_1 A_{22}^3,\ A_{11}^4 = \lambda_2 A_{21}^4,$$
$$A_{12}^5 = \lambda_3 A_{22}^5,\ A_{11}^5 = \lambda_3 A_{21}^5. \quad (3.12)$$

Причем величины λ_1, λ_2, λ_3 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$3B_{112} = A_1^3 A_{21}^4 A_{22}^5(\lambda_2 - \lambda_3) + A_2^3 A_{21}^4 A_{21}^5(\lambda_2 - \lambda_3) +$$
$$+ A_1^4 A_{22}^3 A_{21}^5(\lambda_3 - \lambda_1) + A_1^5 A_{22}^3 A_{21}^4(\lambda_1 - \lambda_2) = 0,$$
$$3B_{221} = A_2^3 A_{21}^4 A_{22}^5(\lambda_2 - \lambda_3) + A_1^4 A_{22}^3 A_{22}^5(\lambda_3 - \lambda_1) +$$
$$+ A_2^5 A_{22}^3 A_{21}^4(\lambda_1 - \lambda_2) + A_2^4 A_{22}^3 A_{21}^5(\lambda_3 - \lambda_1) = 0,$$
$$B_{111} = A_1^3 A_{21}^4 A_{21}^5(\lambda_2 - \lambda_3) \neq 0,$$
$$B_{222} = A_2^4 A_{22}^3 A_{22}^5(\lambda_3 - \lambda_1) \neq 0. \quad (3.13)$$

$$\overset{(1)}{A} = A_{21}^4 A_{21}^5(\lambda_2 - \lambda_3) \neq 0,$$
$$\overset{(2)}{A} = A_{22}^3 A_{22}^5(\lambda_1 - \lambda_3) \neq 0,$$
$$\overset{(3)}{A} = A_{22}^3 A_{21}^4(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0. \quad (3.14)$$

Пусть точка с радиус – вектором $\bar X = \bar A + x^1\bar e_1 + x^2\bar e_2 + x^4\bar e_4 + x^5\bar e_5$ описывает характеристику [2] Γ_3^{45} гиперплоскости l_4^{45} вдоль основного направления $\bar v_2 = (\bar{\mathrm{B}}, \bar\varepsilon_2)$, $(\theta^1 = 0,\ \theta^2 \neq 0)$. Тогда из $(d\bar X, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_4, \bar e_5) = 0$ получаем следующую систему, определяющую указанную характеристику:

$$\Gamma_3^{45} : A_2^3 + x^1 A_{12}^3 + x^2 A_{22}^3 + x^4 A_{42}^3 + x^5 A_{52}^3 = 0,\ x^3 = 0. \quad (3.15)$$

Здесь $(d\bar X, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_4, \bar e_5) = 0$ означает линейное выражение вектора $d\bar X$ через векторы $\bar e_1$, $\bar e_2$, $\bar e_4$ и $\bar e_5$. Аналогично получаем уравнения характеристики Γ_3^{35} гиперплоскости l_4^{35} вдоль основного направления $\bar v_1 = (\bar{\mathrm{B}}, \bar\varepsilon_1)$, $(\theta^1 \neq 0,\ \theta^2 = 0)$:

$$\Gamma_3^{35} : \begin{cases} A_1^4 + x^1 A_{11}^4 + x^2 A_{21}^4 + x^3 A_{31}^4 + x^5 A_{51}^4 = 0, \\ x^4 = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Рассмотрим точку

$$\bar C = \bar A + c^1\bar e_1 + c^2\bar e_2 = l_2 \cap \Gamma_3^{45} \cap \Gamma_3^{35}. \quad (3.17)$$

Тогда из (3.15–3.17) получаем следующую систему для определения c^1 и c^2:

$$\begin{cases} x^3 = 0,\ x^4 = 0,\ x^5 = 0, \\ A_2^3 + c^1 A_{12}^3 + c^2 A_{22}^3 = 0, \\ A_1^4 + c^1 A_{11}^4 + c^2 A_{21}^4 = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Определитель системы (3.18) отличен от нуля в силу (3.11). Поэтому в плоскости l_2, отвечающей точке $B \in M_2$, в общем случае существует одна точка $\bar C$.

Проведем такую канонизацию аффинного репера R в A_5, при которой:

$$A_2^3 = 0,\ A_1^4 = 0 \Rightarrow \omega^3 = A_1^3\theta^1,\ \omega^4 = A_2^4\theta^2. \quad (3.19)$$

Она приведет к следующим дифференциальным уравнениям: $\omega^\alpha = A_a^\alpha\theta^a$, $dA_a^\alpha - A_b^\alpha\theta_a^b + A_\alpha^\beta\omega_\beta^\alpha + A_a^{\hat\alpha}\omega_{\hat\alpha}^\alpha = B_{ab}^\alpha\theta^b$, $(a,b = 1,2;\ \alpha = 1,2;\ \hat\alpha = 3,4,5)$. Заметим, что с учётом [7] фиксация типа (3.19) существует. Из (3.18) следует, что после фиксации (3.19) точка $\bar C = \bar A$. Кроме того, из (3.13) и (3.14), используя (3.4) и (3.19), получаем следующие соотношения:

$$A_1^3(A_{11}^4 A_{22}^5 - A_{21}^4 A_{12}^5) + \varepsilon A_2^4(A_{11}^5 A_{22}^3 - A_{21}^5 A_{12}^3) = 0,$$
$$A_1^3 A_{21}^4 A_{22}^5(\lambda_2 - \lambda_3) + \varepsilon A_2^4 A_{22}^3 A_{21}^5(\lambda_3 - \lambda_1) = 0,$$
$$A_1^5 + \varepsilon A_2^5 = 0.$$

Обычным путем находятся следующие уравнения:

1) характеристика Γ_1^3 плоскости $l_3^3 = (\bar A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_3)$ вдоль направления $\bar v_1 = (\bar B, \bar\varepsilon_1)$, $(\theta^1 \neq 0,\ \theta^2 = 0)$ определяется линейными уравнениями:

$$\Gamma_1^3 : \begin{cases} A_{11}^4 x^1 + A_{21}^4 x^2 + A_{31}^4 x^3 = 0, \\ A_1^5 + A_{11}^5 x^1 + A_{21}^5 x^2 + A_{31}^5 x^3 = 0, \\ x^4 = 0,\ x^5 = 0, \end{cases}$$

2) характеристика Γ_1^4 плоскости $l_3^4 = (\bar A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_4)$ вдоль направления $\bar v_2 = (\bar B, \bar\varepsilon_2)$, $(\theta^2 \neq 0,\ \theta^1 = 0)$ определяется линейными уравнениями:

$$\Gamma_1^4 : \begin{cases} A_{12}^3 x^1 + A_{22}^3 x^2 + A_{42}^3 x^4 = 0, \\ A_2^5 + A_{12}^5 x^1 + A_{22}^5 x^2 + A_{42}^5 x^4 = 0, \\ x^3 = 0,\ x^5 = 0, \end{cases}$$

3) характеристика Γ_1^5 плоскости $l_3^5 = (\bar A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_5)$ вдоль направления $\bar v_3 = (\bar B, \bar\varepsilon_1 + \varepsilon\bar\varepsilon_2)$, $(\theta^2 = \varepsilon\theta^1)$ определяется линейными уравнениями:

$$\Gamma_1^5 : \begin{cases} A_1^3 + \varepsilon A_{12}^3 x^1 + \varepsilon A_{22}^3 x^2 + \\ +(A_{51}^3 + \varepsilon A_{52}^3)x^5 = 0, \\ \varepsilon A_2^4 + A_{11}^4 x^1 + A_{21}^4 x^2 + \\ +(A_{51}^4 + \varepsilon A_{52}^4)x^5 = 0, \\ x^3 = 0,\ x^4 = 0. \end{cases}$$

Проведем заключительную канонизацию аффинного репера R в соответствии с [7]:

$$A_{31}^4 = 0,\ A_{31}^5 = 0,\ A_{42}^3 = 0,\ A_{42}^5 = 0,$$
$$A_{51}^3 + \varepsilon A_{52}^3 = 0,\ A_{51}^4 + \varepsilon A_{52}^4 = 0. \qquad (3.20)$$

Отсюда в силу (1.3) следует, что

$$\omega_3^4 = A_{32}^4\theta^2, \omega_4^3 = A_{41}^3\theta^1, \omega_3^5 = A_{32}^5\theta^2, \omega_4^5 = A_{41}^5\theta^1,$$
$$\omega_5^3 = A_{52}^3(-\varepsilon\theta^1 + \theta^2), \omega_5^4 = A_{52}^4(-\varepsilon\theta^1 + \theta^2),$$

$$\omega_{\hat\alpha}^{\alpha} = A_{\hat\alpha a}^{\alpha}\theta^a,\ dA_{\hat\alpha a}^{\alpha} - A_{\hat\alpha b}^{\alpha}\theta_a^b + A_{\hat\alpha a}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha} + A_{\hat\alpha a}^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^{\alpha} = B_{\hat\alpha ab}^{\alpha}\theta^b.$$

Таким образом, при фиксации (3.20) прямые $l_1^{\hat\alpha} = (\overline{A},\overline{e}_{\hat\alpha})$, ($\hat\alpha$ = 3,4,5), выбираются следующим образом: $l_1^{\hat\alpha}\uparrow\uparrow\Gamma_1^{\hat\alpha}$. Поэтому заключаем, что оснащение l_3 геометрически характеризуется тем, что оно содержит прямые $l_1^{\hat\alpha}$:

$$l_3 = (\overline{A},\ \overline{e}_3,\ \overline{e}_4,\ \overline{e}_5) = l_1^3 \cup l_1^4 \cup l_1^5. \qquad (3.21)$$

4. Оснащение семейства S_q при $2 < q \leqslant 8$

В этом параграфе будет дано построение инвариантного оснащения при $2 < q \leqslant 8$. При этом будем предполагать, что в пространстве L_q, соответствующем каждой точке $B \in M_q$, проведена фиксация центроаффинного репера $\widetilde{R}$, осуществленная по формулам (2.12) при любых q ($2 < q \leqslant 8$). Рассмотрим в плоскости $l_2 = (\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2)$ точку $\overline{X} = \overline{A} + x^1\overline{e}_1 + x^2\overline{e}_2$, отвечающую точке $B \in M_q$. Пусть эта точка является фокусом плоскости l_2 вдоль (фокальной) интегральной линии, принадлежащей распределению Δ_3^{12}: $\theta^4 = \theta^5 = ... = \theta^q = 0$ в смысле [8]. Это распределение каждой точке $B \in M_q$ ставит в соответствие 3-плоскость $\Gamma_3^{12} = (\overline{B},\overline{\varepsilon}_1,\overline{\varepsilon}_2,\overline{\varepsilon}_3) \subset L_q$, натянутую на направления $v_1^1 = (\overline{B},\overline{\varepsilon}_1)$, $v_1^2 = (\overline{B},\overline{\varepsilon}_2)$ и $v_1^3 = (\overline{B},\overline{\varepsilon}_3)$. Тогда $(d\overline{X},\overline{e}_1,\overline{e}_2)=0$, $\theta^4 = \theta^5 = ... = \theta^q = 0$. Отсюда получаем следующую систему, определяющую фокусы и фокальные направления:

$$x^{\bar\alpha}A_{\bar\alpha\bar a}^{\hat\alpha}\theta^{\bar a} = 0,\ x^{\hat\alpha} = 0,\ \theta^4 = \theta^5 = ... = \theta^q = 0. \qquad (4.1)$$
$$x^0 = 1,\ \omega_0^{\hat\alpha} = \omega^{\hat\alpha},\ (\bar\alpha = 0,1,2;\ \hat\alpha = 3,4,5;\ \bar a = 1,2,3).$$

Система (4.1) имеет нетривиальные решения относительно $\theta^{\bar a}$ тогда и только тогда, когда

$$\det[x^{\bar\alpha}A_{\bar\alpha\bar a}^{\hat\alpha}] = 0, \qquad (4.2)$$

или, когда

$$\Phi_1^3 : A_{\bar\alpha_1\bar\alpha_2\bar\alpha_3}x^{\bar\alpha_1}x^{\bar\alpha_2}x^{\bar\alpha_3} = 0,\ x^{\hat\alpha} = 0,$$
$$(\bar\alpha_1, \bar\alpha_2, \bar\alpha_3 = 0,1,2). \qquad (4.3)$$

Здесь симметрические величины $A_{\bar\alpha_1\bar\alpha_2\bar\alpha_3}$ определяются по формулам: $A_{\bar\alpha_1\bar\alpha_2\bar\alpha_3} = 1/3|A^3_{(\bar\alpha_1|\bar\alpha|}\ A^4_{\bar\alpha_2|\bar\alpha|}\ A^5_{\bar\alpha_3)\bar\alpha}|$, ($\bar\alpha$ – номера строк), и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dA_{\bar\alpha_1\bar\alpha_2\bar\alpha_3} - A_{\alpha\bar\alpha_2\bar\alpha_3}\omega_{\bar\alpha_1}^{\alpha} - A_{\bar\alpha_1\alpha\bar\alpha_3}\omega_{\bar\alpha_2}^{\alpha} -$$
$$- A_{\bar\alpha_1\bar\alpha_2\alpha}\omega_{\bar\alpha_3}^{\alpha} = A_{\bar\alpha_1\bar\alpha_2\bar\alpha_3 a}\theta^a.$$

Таким образом, множество всех фокусов плоскости l_2 образует фокусную алгебраическую кривую Φ_1^3 третьего порядка, определяемую уравнениями (4.3). Каждой точке этой кривой отвечает фокальное направление, определяемое из системы (4.1) при условии (4.2). Из (4.3) замечаем, что линейным полюсом несобственной прямой плоскости l_2 относительно Φ_1^3 (т.е. центром фокусной кривой Φ_1^3) является точка $\overline{C} = \overline{A} + c^1\overline{e}_1 + c^2\overline{e}_2$, где c^1, c^2 определяются из системы $A_{0\alpha\beta}c^{\alpha} + A_{00\beta} = 0$, ($\alpha,\beta = 1,2$). Эта система будет иметь единственное решение относительно c^{α} (т.е. существует единственный центр $\overline{C}$) тогда и только тогда, когда $\widetilde{A} = \det[A_{0\alpha\beta}] \neq 0$, ($\alpha,\beta = 1,2$). В противном случае она будет иметь бесчисленное множество решений (т.е. существует прямая центров) или вовсе не будет иметь решений (т.е. кривая Φ_1^3 не имеет центра).

Проведем в A_5 такую канонизацию аффинного репера R, при которой

$$A_{00\alpha} = 0,\ \tilde{A} \neq 0, \qquad (4.4)$$

что приводит к дифференциальным уравнениям: $\omega^{\alpha} = A_a^{\alpha}\theta^{\alpha}$, $dA_a^{\alpha} - A_b^{\alpha}\theta_a^b + A_a^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha} + A_a^{\hat\alpha}\omega_{\hat\alpha}^{\alpha} = A_{ab}^{\alpha}\theta^b$. Откуда следует, что эта канонизация репера R существует в соответствии с [7]. Теперь центром фокусной кривой Φ_1^3 является точка $\overline{C} = \overline{A}$. Из (4.3) с учетом (4.4) замечаем, что кривая второго порядка K_1^2: $A_{0\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} + A_{00\beta} = 0$ является квадратичной полярой точки $\overline{C}$ относительно Φ_1^3, а прямые Γ_1: $A_{\alpha\beta\gamma}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma} = 0$, $x^{\hat\alpha} = 0$ образуют в l_2 асимптотические направления относительно фокусной кривой Φ_1^3. Заметим, что в силу (4.4) кривая K_1^2 не вырождается. Будем иметь вдоль Δ_3^{12}: $d\overline{A} = \omega^{\alpha}\overline{e}_{\alpha} + \omega^{\hat\alpha}\overline{e}_{\hat\alpha}|_{\theta^4 = ... = \theta^q = 0} = \overline{E}_{\bar a}\theta^{\bar a}$: где

$$\overline{E}_{\bar a} = A_{\bar a}^{\alpha}\overline{e}_{\alpha} + A_{\bar a}^{\hat\alpha}\overline{e}_{\hat\alpha},\ (\bar a = 1,2,3;\ \alpha = 1,2;\ \hat\alpha = 3,4,5). \qquad (4.5)$$

Заметим, что векторы (4.5) линейно независимы, когда $\mathrm{Rang}[A_{\bar a}^{\alpha};A_{\bar a}^{\hat\alpha}] = 3$. В этом случае все касательные к линиям $(\overline{A})$, описываемым точкой $\overline{A}$ вдоль интегральных кривых распределения Δ_3^{12}, лежат в одной и той же 3-плоскости $l_3 = (\overline{A},\overline{E}_1,\overline{E}_2,\overline{E}_3)$.

Проведем в соответствии с [7] заключительную канонизацию аффинного репера R в A_5:

$$A_a^{\alpha} = 0,\ \mathring{A} \equiv \det[A_{\bar a}^{\hat\alpha}] \neq 0, \qquad (4.6)$$

что приводит к дифференциальным уравнениям: $\omega_{\hat\alpha}^{\alpha} = A_{\hat\alpha a}^{\alpha}\theta^{\alpha}$, $dA_{\hat\alpha a}^{\alpha} - A_{\hat\alpha b}^{\alpha}\theta_a^b + A_{\hat\alpha a}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha} - A_{\hat\beta a}^{\alpha}\omega_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = A_{\hat\alpha ab}^{\alpha}\theta^b$.

Геометрически канонизация (4.6) означает, что

$$l_3 = (\overline{A},\ \overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \overline{e}_3). \qquad (4.7)$$

Из (1.5) следует, что 3-плоскость (4.7) является оснащением. Это оснащение будем называть основным оснащением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кругляков Л.З. Основы проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей. Учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1980. – С. 110.
2. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга r // Изв. вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
3. Остиану Н.М. Об инвариантном оснащении семейств многомерных плоскостей в проективном пространстве: Труды геометрического семинара. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1969. – Т. 2. – С. 247–262.
4. Ивлев Е.Т. О многообразии $E(L,L_m,L_{m+1}^{\hat{\alpha}})$ в n-мерном проективном пространстве $P_n(m>2)$ // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6. – С. 1307–1320.
5. Ивлев Е.Т. О многообразии $T(0,n-m,m)$ в n-мерном проективном пространстве $P_n(m>2,n<m(m+1))$ // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 5. – С. 1143–1156.
6. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. Т. I. – М.: ИЛ, 1954.
7. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl (RNR). – 1962. – V. 2. – P. 231–240.
8. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Непроков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1979. – С. 7–246.

УДК 681.518:519.68